Fiche 101 **Niveau : 1** **Jaune**

Fonction continues nulle part dérivables

1 Introduction

Avant l'exemple d'une fonction continue qui n'est dérivable en aucun point, donné par Karl Weierstrass (1815-1897) en 1871, il y avait eu plusieurs « démonstrations » pour prouver que toute fonction continue était dérivable sauf peut être en quelques points exceptionnels. Ces « démonstrations » fautives étaient la plupart du temps basées sur la mauvaise intuition géométrique que le graphe d'une fonction continue admet sauf en quelques points exceptionnels une tangente. Dès 1834 Bernard Bolzano (1781-1848) avait donné un exemple de fonction continue qui n'a de dérivée en aucun point. Cependant, lui-même n'avait pas prouvé complètement ce comportement, mais plus restrictivement, que la fonction qu'il proposait n'avait pas de dérivée sur un ensemble dense. La non dérivabilité partout de sa fonction n'a été prouvée que plus tard. D'autre part l'œuvre de Bolzano étant restée longtemps inconnue, tout ceci passa inaperçu à cette époque là. C'est bien dommage car déjà la connaissance de cet exemple, même limité à une démonstration valable sur un ensemble dense, aurait évité les nombreuses démonstrations fausses qui ont traîné par la suite dans les livres.
Je ne resiste pas à l'envie de proposer quelques extraits de lettres et textes divers qui sont assez révélateurs des questions soulevées par ce problème.

Extrait d'une lettre de Gösta Mittag-Leffler à Charles Hermite 14 Octobre 1881 (Archives de l'Académie des Sciences de Paris).

« *C'est vrai que les erreurs ont profité à la Science, mais alors on a été naïf et on croyait à l'erreur. Mais comment voulez-vous enseigner une erreur quand vous savez que c'est une erreur ? Comment voulez-vous démontrer par exemple que chaque fonction continue a une dérivée quand vous savez que c'est fautif ? Monsieur Serret dans la nouvelle édition de son calcul intégral a tout un système de démonstrations qui sont toutes fautives. Et il n'en dit pas un mot. Mais ce n'est pas non plus difficile de donner des démonstrations correctes.* »

Extrait d'une lettre de Gaston Darboux à Jules Houël non datée mais vraisemblablement de 1872 (Archives de l'Académie des Sciences de Paris).

« *Quant à Gilbert le grand Belge, nous avons grand besoin d'agir avec prudence et il faut bien choisir notre moment pour lui asséner un coup terrible et dont ce grand Belge ne puisse se relever. Il attaque Hankel. C'est bien. Hankel est de force à répondre. Écrivez-lui puisque vous le connaissez et attendons. C'est là le premier point. Quand Hankel aura répondu d'une manière victorieuse, je n'en doute pas, nous arriverons à la rescousse et gare à Gilbert. Nous aurons la partie d'autant plus belle qu'à Berlin il y a aussi des géomètres pointus et que Weierstrass a lu un article sur les fonctions qui n'ont pas de dérivée. Je reprendrai la démonstration de Gilbert que j'affirme être fausse, sans l'avoir lue ... je vous promets que nous l'assomerons ...* »

Note : Louis-Philippe Gilbert (1832-1892), de nationalité française, était Professeur à l'Université Catholique de Louvain et fut nommé Membre Associé de L'Académie Royale de Belgique. Il attaque Hermann Hankel (1839-1873) car celui-ci rajoutait dans un théorème l'hypothèse « fonction

dérivable » à l'hypothèse « fonction continue ». Cette hypothèse d'après L.-P. Gilbert, auteur d'une preuve de la dérivabilité de toute fonction continue, était bien entendu superfétatoire.

Extrait d'une lettre de Gaston Darboux à Jules Houël, 1876, (Archives de l'Académie des Sciences de Paris).
« *... qu'est-ce que ce Bolzano dont vous me parlez à propos d'un théorème sur la continuité des fonctions.*

2 Problème

On va démontrer l'existence d'une fonction qui n'est dérivable nulle part. On va tout d'abord donner un exemple construit à la main. Puis dans une deuxième partie on utilisera un théorème fondamental de l'analyse, plus précisément le théorème de Baire, pour montrer l'existence d'une telle fonction.

Partie I - Un exemple de fonction nulle part dérivable

On considère la fonction ϕ définie sur l'intervalle fermé $[0, 2]$ de la façon suivante :

$$\phi(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

puis prolongée sur tout $\mathbb{R}$ par périodicité de période 2 c'est-à-dire :

$$\phi(x + 2) = \phi(x).$$

Posons

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi\left(4^n x\right).$$

1) Première étude des fonctions ϕ et f.

a) Montrer que la fonction ϕ est continue.

b) Montrer que la fonction f est continue.

c) Soit x un entier. Montrer que

$$\phi(x) - \phi(x + 1) = \pm 1.$$

Donner un exemple de chaque cas.

2) Soit x un nombre réel fixé. Fixons aussi un entier $m \geq 0$. Soit k l'unique entier tel que :

$$k \leq 4^m x < k + 1.$$

Posons :

$$\alpha_m = \frac{k}{4^m} \quad \text{et} \quad \beta_m = \frac{k+1}{4^m}.$$

a) Montrer que si $n > m$ la différence $4^n\beta_m - 4^n\alpha_m$ est un entier pair. Que vaut dans ce cas $\phi\left(4^n\beta_m\right) - \phi\left(4^n\alpha_m\right)$?

b) Montrer que si $n = m$ alors $\phi\left(4^n\beta_m\right) - \phi\left(4^n\alpha_m\right) = \pm 1$.

c) Montrer que si $n < m$ il n'y a pas d'entier dans l'intervalle ouvert $]4^n\alpha_m, 4^n\beta_m[$. Quelle est dans ce cas la valeur de $\phi\left(4^n\beta_m\right) - \phi\left(4^n\alpha_m\right)$?

3) On s'intéresse maintenant au rapport

$$\frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m}$$

a) Montrer que

$$|f(\beta_m) - f(\alpha_m)| \geq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^m.$$

b) Montrer que

$$\left|\frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m}\right| \geq \frac{1}{2}\,3^m.$$

c) Conclure de l'étude précédente que f n'est pas dérivable en x, et donc que f n'est dérivable en aucun point.

Partie II - Application du théorème de Baire

1) Notons $\mathrm{C}[0,1]$ l'espace des fonctions continues sur le segment $[0,1]$ à valeurs réelles. Cet espace sera muni de la norme

$$||f|| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Muni de cette norme l'espace $\mathrm{C}[0,1]$ est un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire un espace de Banach. On définit pour tout entier $n \geq 1$ le sous-ensemble M_n de $\mathrm{C}[0,1]$ constitué de toutes les fonctions continues f telles qu'il existe un point $t \in [0, \frac{1}{2}]$ (qui dépend de f), pour lequel on a :

$$\sup_{\frac{1}{2}\geq h>0} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{h} \leq n. \qquad (1)$$

a) Soit $(f_k)_k$ une suite de fonctions de M_n qui converge vers une fonction f. On note t_k un point de $[0, \frac{1}{2}]$ tel que f_k satisfasse à la condition (1) avec $t = t_k$. Montrer qu'on peut extraire une sous-suite $(t_{k_i})_i$ de la suite $(t_k)_k$ qui converge. On notera $\tau = \lim_{i\to+\infty} t_{k_i}$. Montrer que $\lim_{i\to+\infty} f_{k_i}(t_{k_i}) = f(\tau)$ et plus généralement que pour tout $\frac{1}{2} \geq h > 0$ on a aussi $\lim_{i\to+\infty} f_{k_i}(t_{k_i}+h) = f(\tau+h)$. En conclure que $f \in M_n$ et donc que M_n est fermé.

b) Soit $f \in M_n$. Montrer que dans toute boule de centre f, il existe une fonction $g \in \mathrm{C}[0,1]$ qui ne soit pas dans M_n. En conclure que M_n est d'intérieur vide.

2) Fonctions non dérivables.

a) Soit D l'ensemble des fonctions de $\mathrm{C}[0,1]$ qui sont dérivables en au moins un point $t \in [0, \frac{1}{2}]$. Montrer que $D \subset \cup_{n=1}^{+\infty} M_n$. En conclure que D est d'intérieur vide. En particulier conclure qu'il existe une fonction continue sur $[0,1]$ qui n'est dérivable en aucun point de $[0, \frac{1}{2}]$.

b) Comment pourrait on faire dans le même ordre d'idée pour montrer l'existence d'une fonction continue sur $[0,1]$ que ne soit dérivable en aucun point de $[0,1]$.

c) À partir de là comment construire une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

3 Solution

Partie I :

1) Présentation du contrexemple.

a) La fonction ϕ est continue affine par morceaux sur $[0, 2]$. Comme $\phi(0) = \phi(2)$ la fonction obtenue par prolongement périodique de période 2 est aussi continue.

b) La série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi\left(4^n x\right)$$

est une série normalement convergente de fonctions continues. En effet :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\left(\frac{3}{4}\right)^n \phi\left(4^n x\right)\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 4.$$

La série qui définit f est donc une série uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ de fonctions continues. Elle converge vers une fonction continue.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $x_1 = x \mod 2$. Ainsi $0 \leq x_1 < 2$ et $\phi(x_1) = \phi(x)$ en raison de la périodicité de ϕ. Soit $x_2 = (x+1) \mod 2$. On a aussi $0 \leq x_2 < 2$ et $\phi(x_2) = \phi(x+1)$. Remarquons que :

$$(x+1) \mod 2 = ((x \mod 2) + 1) \mod 2,$$

donc

$$x_2 = (x_1 + 1) \mod 2.$$

Si bien que si $0 \leq x_1 < 1$ alors $x_2 = x_1 + 1$ et si $1 \leq x_1 < 2$ alors $x_2 = x_1 + 1 - 2 = x_1 - 1$. On a donc construit deux points x_1 et x_2 tels que :

1. x_1 et x_2 sont des éléments de $[0, 2[$;
2. $|x_1 - x_2| = 1$;
3. $\phi(x_1) = \phi(x)$ et $\phi(x_2) = \phi(x+1)$;

De ce fait, on voit que :

$$\phi(x_1) + \phi(x_2) = 1.$$

Supposons maintenant que x soit entier, alors x_1 et x_2 sont 2 entiers distincts de l'intervalle $[0, 2[$. Donc l'un vaut 0 et l'autre vaut 1. En conséquence

$$\phi(x) - \phi(x+1) = \pm\big(\phi(0) - \phi(1)\big) = \pm 1.$$

Les deux cas peuvent se produire. Prenons l'exemple $x = 0$ alors $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$. Dans l'exemple $x = 1$ on a au contraire $x_1 = 1$ et $x_2 = 0$.

2) Étude de la différence $\phi\left(4^n \beta_m\right) - \phi\left(4^n \alpha_m\right)$. Dans tous les cas nous avons la relation suivante :

$$4^n \beta_m - 4^n \alpha_m = 4^{n-m}(k+1) - 4^{n-m}k = 4^{n-m}.$$

a) Si $n > m$ alors $4^n \beta_m - 4^n \alpha_m$ est une puissance > 0 de 4. Donc c'est bien un multiple de 2, et d'après la périodicité de la fonction ϕ on obtient :

$$\phi\left(4^n \beta_m\right) - \phi\left(4^n \alpha_m\right) = 0.$$

b) Si $n = m$ les nombres $4^n\beta_m$ et $4^n\alpha_m$ sont deux entiers consécutifs. On sait d'après la question 1) c) que

$$\phi\left(4^n\beta_m\right) - \phi\left(4^n\alpha_m\right) = \pm 1.$$

c) Si $n < m$ alors il n'y a pas d'entier q dans l'intervalle ouvert $]4^n\alpha_m, 4^n\beta_m[$. Sinon on aurait :

$$4^n\alpha_m < q < 4^n\beta_m,$$

$$4^m\alpha_m < 4^{m-n}q < 4^m\beta_m,$$

$$k < 4^{m-n}q < k+1,$$

avec $4^{m-n}q$ et k des entiers, ce qui est impossible. Donc $4^n\alpha_m$ et $4^n\beta_m$ appatiennent à un même intervalle sur lequel la fonction ϕ est affine de coefficient directeur ± 1. On en déduit que :

$$\phi\left(4^n\beta_m\right) - \phi\left(4^n\alpha_m\right) = \pm\left(4^n\beta_m - 4^n\alpha_m\right),$$

$$\phi\left(4^n\beta_m\right) - \phi\left(4^n\alpha_m\right) = \pm 4^{n-m}.$$

En conclusion de cette étude on peut écrire :

$$\left|\phi\left(4^n\beta_m\right) - \phi\left(4^n\alpha_m\right)\right| = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n > m \\ 4^{n-m} & \text{si} \quad n \leq m \end{cases}.$$

3) La fonction f n'est pas dérivable.

a)

$$f(\beta_m) - f(\alpha_m) = \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n \epsilon_n 4^{n-m},$$

où $\epsilon_n = \pm 1$. Donc on a successivement :

$$|f(\beta_m) - f(\alpha_m)| \geq \left(\frac{3}{4}\right)^m - \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n 4^{n-m},$$

$$|f(\beta_m) - f(\alpha_m)| \geq \left(\frac{3}{4}\right)^m - \left(\frac{1}{4^m} \times \frac{3^m - 1}{3 - 1}\right),$$

$$|f(\beta_m) - f(\alpha_m)| \geq \left(\frac{3}{4}\right)^m - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^m,$$

$$|f(\beta_m) - f(\alpha_m)| \geq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^m.$$

On peut alors calculer une quantité liée au rapport de dérivation :

$$\left|\frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m}\right| \geq \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^m}{4^{-m}} = \frac{1}{2}\,3^m.$$

b) Regardons tout d'abord le cas particulier où il existe un entier m_0 tel que $4^{m_0}x$ soit un entier, alors pour tout $m \geq m_0$ le nombre $4^m x$ est entier, et donc $x = \alpha_m$. Dans ces conditions, si on applique l'inégalité trouvée à la question précédente on obtient

$$\left|\frac{f(\beta_m) - f(x)}{\beta_m - x}\right| \geq \frac{1}{2}\,3^m,$$

ce qui prouve que f n'est pas dérivable au point x.
Sinon on a pour tout m :

$$\alpha_m < x < \beta_m.$$

Majorons alors :

$$\left|\frac{f(\beta_m)-f(\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m}\right| \leq \frac{|f(\beta_m)-f(x)|+|f(x)-f(\alpha_m)|}{|\beta_m-\alpha_m|},$$

$$\left|\frac{f(\beta_m)-f(\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m}\right| \leq \left|\frac{f(\beta_m)-f(x)}{\beta_m-x}\right| + \left|\frac{f(x)-f(\alpha_m)}{x-\alpha_m}\right|.$$

Si la fonction f était dérivable au point x, le deuxième membre de l'inégalité précédente aurait pour limite $2|f'(x)|$ lorsqu'on fait tendre m vers $+\infty$. Or d'après la question précédente, le premier membre tend vers $+\infty$. La fonction f n'est donc pas dérivable au point x.
Comme x est arbitraire, la fonction f n'est dérivable en aucun point.

Partie II :

1) Étude des ensembles M_n.

a) La suite $(t_k)_k$ est une suite de points du compact $[0, \frac{1}{2}]$. On peut donc en extraire une sous-suite $(t_{k_i})_i$ convergente vers un élément $\tau \in [0, \frac{1}{2}]$.
On a alors :

$$|f_{k_i}(t_{k_i}) - f(\tau)| \leq |f_{k_i}(t_{k_i}) - f(t_{k_i})| + |f(t_{k_i}) - f(\tau)|,$$

$$|f_{k_i}(t_{k_i}) - f(\tau)| \leq ||f_{k_i} - f|| + |f(t_{k_i}) - f(\tau)|,$$

ce qui compte tenu d'une part de la convergence dans $\mathrm{C}[0,1]$ de la suite $(f_{k_i})_i$ vers f et d'autre part de la continuité uniforme de f, nous permet de dire que

$$\lim_{i\to+\infty} f_{k_i}(t_{k_i}) = f(\tau).$$

De même on peut refaire un calcul analogue et montrer que pour tout $h \in]0, \frac{1}{2}]$ on a aussi :

$$\lim_{i\to+\infty} f_{k_i}(t_{k_i}+h) = f(\tau+h).$$

Donc pour tout h

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{|f_{k_i}(t_{k_i}+h) - f_{k_i}(t_{k_i})|}{h} = \frac{|f(\tau+h)-f(\tau)|}{h},$$

ce qui montre que

$$\sup_{h\in]0,\frac{1}{2}]} \frac{|f(\tau+h)-f(\tau)|}{h} \leq n,$$

et donc que $f \in M_n$. L'ensemble M_n est donc fermé puisque toute suite convergente d'éléments de M_n converge vers un élément de M_n.

b) Soit $B(f,r)$ la boule de centre f et de rayon $r > 0$. On utilise la continuité uniforme de f sur $[0,1]$ pour construire un partage $(x_i)_{i=0\cdots s}$ où $x_i = i/s$ de telle sorte que pour tout $i \in \{0, \cdots, s-1\}$ et tout couple x, y de points de $[x_i, x_{i+1}]$ on ait $|f(x) - f(y)| \leq r/4$. On considère le rectangle $R_i = [x_i, x_{i+1}] \times [f(x_i) - r/2, f(x_i + r/2)]$. On peut construire alors sur $[x_i, x_{i+1}]$ une fonction affine par morceaux g_i telle que (cf. figure 1) :

1. les coefficients directeurs des morceaux affines de g_i sont en valeur absolue $> n$ (on construit une fonction en dents de scie, dont on choisit les dents suffisamment pointues) ;
2. le graphe de g_i est contenu dans le rectangle R_i ;

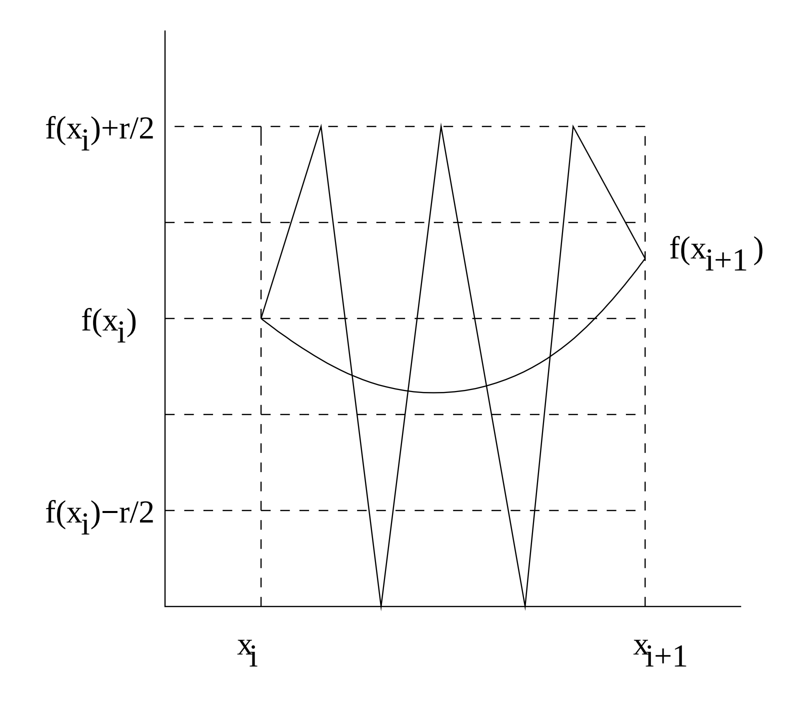


FIG. 1 – Approximation de f sur un intervalle

3. $g_i(x_i) = f(x_i)$ et $g_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$.

On remarque que sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, la fonction g_i vérifie $|g_i(x) - f(x)| < r$. Si on raccorde toutes ces fonctions g_i on obtient une fonction continue $g \in B(f, r)$ qui n'appartient pas à M_n. On conclut que M_n est d'intérieur vide car il ne contient aucune boule.

2) Fonctions non dérivables.

a) Si f est une fonction dérivable au point $t \in [0, \frac{1}{2}]$ alors le rapport de dérivation à droite (pour ne pas avoir de problème au point 0) au point t, $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ (avec h>0, ce qui a un sens puisque $t < 1$) qu'on prolonge par continuité pour $h = 0$ par la valeur $f'(t)$ est une fonction continue de h sur $[0, \frac{1}{2}]$ et donc est bornée sur cet intervalle. On en conclut qu'il existe n tel que $f \in M_n$. En vertu du théorème de Baire, $\cup_{n=1}^{\infty} M_n$ n'est pas égal à $\mathrm{C}[0, 1]$. Il existe une fonction f qui n'appartient à aucun des M_n. En conséquence f est une fonction continue sur $[0, 1]$ qui n'est dérivable en aucun point de $[0, \frac{1}{2}]$.

c) En faisant la même étude avec les rapports de dérivation à gauche, on construit pour tout entier $n \geq 1$ le sous-ensemble N_n de $\mathrm{C}[0, 1]$ constitué de toutes les fonctions continues f telles qu'il existe un point $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ (qui dépend de f), pour lequel on a :

$$\sup_{\frac{1}{2} \geq -h > 0} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{h} \leq n. \qquad (2)$$

On obtient un résultat analogue sur les N_n, en particulier si f est dérivable en un point $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ alors f appartient à un N_n.

Mais en vertu du théorème de Baire, $(\cup_{n=1}^{\infty} M_n) \cup (\cup_{n=1}^{\infty} N_n)$ n'est pas égal à $\mathrm{C}[0, 1]$. Donc il existe une fonction continue f qui n'est dans aucun des M_n et dans aucun des N_n, c'est-à-dire que f n'est dérivable nulle part sur $[0, 1]$.

c) On a construit une fonction f définie et continue sur $[0, 1]$ qui n'est dérivable en aucun point de $[0, 1]$, c'est-à-dire plus précisément quie f n'est dérivable en aucun point de $]0, 1[$, n'est pas dérivable à droite en 0 et n'est pas dérivable à gauche en 1. On peut par translation en déduire pour chaque intervalle $[i, i + 1]$ une fonction qui n'est dérivable en aucun point.

En considérant pour chaque i une fonction f_i qui n'est dérivable nulle part sur l'intervalle $[i, i+1]$ et en raccordant les f_i aux points entiers par le rajout de constantes adaptées afin que le tout soit continu on obtient une fonction f qui n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.
On définit f par récurrence : $f = f_0$ sur $[0, 1]$. Si on définit f sur $[0, k]$ ($k > 0$) on définit f sur $]k, k+1]$ par $f = f_k - f_k(k) + f(k)$. On fait pareil pour des entiers < 0. Si f est défini sur $[-k, 1]$ ($k \geq 0$), on définit f sur $[-k-1, -k[$ par $f = f_{-(k+1)} - f_{-(k+1)}(-k) + f(-k)$. La fonction f vérifie bien ce qu'on cherche.

4 Petits rappels théoriques

On fait ici un petit résumé très minimal sur la convergence uniforme des suites et séries de fonctions à valeurs réelles (ou complexe, ça marche aussi). On conseille au lecteur de se reporter à un cours complet sur ces questions. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Souvent A sera un intervalle (a, b) de $\mathbb{R}$ (a et b pouvant éventuellement prendre les valeurs respectives $-\infty$ et $+\infty$).

Définition 4.1 *Une suite $(f_n)_n$ de fonctions réelles définies sur A est dite uniformément convergente vers la fonction f si quel que soit $\epsilon > 0$ il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ et tout x on ait :*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

(Le même N marche pour tous les x de A). On a alors le théorème suivant de stabilité (l'espace des fonctions continues est stable par passage à la limite uniforme) :

Théorème 4.2 *Une suite de fonctions réelles continues définies sur A qui converge uniformément, converge vers une fonction continue sur A.*

Remarque 4.3 *Attention :*
- *La convergence simple n'a pas cette propriété de stabilité.*
- *Même avec la convergence uniforme, ça ne se passe pas aussi bien pour la dérivabilité.*
- *Que peut on dire pour la primitivation ?*

La convergence uniforme se détecte sur la condition de Cauchy uniforme.

Théorème 4.4 *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions réelles définies sur A. Supposons que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, tout $m \geq N$ et tout $x \in A$ on ait la condition suivante :*

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon.$$

Alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f.

Les notions précédentes s'appliquent aux sommes de séries de fonctions. Il suffit pour cela de les appliquer à la suite constituée par les sommes partielles de la série.

Définition 4.5 *La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est dite uniformément convergente si la suite $\big((S_n(x))\big)_n$ où*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$$

est uniformément convergente.

Il est alors facile de voir que :

Théorème 4.6 *Si une série de fonctions réelles continues converge uniformément, alors la limite est continue.*

Le très bon cas suivant permet de conclure à la convergence uniforme d'une série de fonctions :

Théorème 4.7 *Soit $u_n(x)$ le terme général d'une série de fonctions à valeurs réelles définie sur une partie A et $\mathbb{R}$ On suppose que :*

1. *pour tout n la borne supérieure*
$$\sup_{x \in A} |u_n(x)|$$
est finie, on la note a_n ;
2. *la série numérique à termes positifs*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$
converge.

(On dit dans ce cas que la série est normalement convergente). Alors la série $\sum_{n=0}^{n} u_n(x)$ est uniformément convergente sur A

Preuve. Il suffit de montrer que la condition de Cauchy uniforme pour les sommes partielles de la série est réalisée, ce qui est immédiat à partir des calculs suivants (on suppose $n > m$) :

$$|S_n(x) - S_m(x)| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} u_k(x) \right|,$$

$$|S_n(x) - S_m(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |u_k(x)|,$$

$$|S_n(x) - S_m(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} a_k.$$

Comme la série numérique de terme général a_k converge, on peut rendre la somme $\sum_{k=m+1}^{n} a_k$ petite, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier N tels que pour tout n tout m tels que $n \geq m \geq N$ on ait :

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k \leq \epsilon.$$

□

Auteur : Robert Rolland
Diffusé par l'Association ACrypTA